TEMA Nº 5 → DISEÑOS CON MÁS DE DOS GRUPOS INDEPENDIENTES

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DE VARIANZA (ANOVA)

Análisis de Varianza (ANOVA ó ANVAR) *→ es una* ***técnica paramétrica*** *de análisis estadístico que se utiliza para comparar las medias de más de dos grupos.*
El diseño de más de dos grupos tiene por objeto estudiar la influencia de más de dos valores de la variable independiente sobre la variable dependiente y, por tanto, tiene más posibilidades de establecer la relación precisa entre ellas. Una de las características más importantes del diseño de experimentos es la aleatoriedad: elección de un grupo (muestra) y su distribución en tres o más grupos de forma aleatoria.
Al comparar distintos grupos para realizar un estudio tenemos en cuenta la ***variabilidad*** *que aparezca entre los sujetos en la variable dependiente que se considera formada por dos componentes: la que se debe al* ***factor estudiado*** *(atribuible a los distintos tratamientos experimentales; variable independiente) y la que se debe a* ***factores extraños*** *y no controlados (Error Experimental)*
El Análisis de Varianza se fundamenta en el estudio de estas variabilidades. La ***varianza general o común*** *se divide en:* ***varianza intergrupos*** *(atribuible a los distintos niveles del factor estudiado) y* ***varianza intragrupos*** *(atribuible al error experimental). Al comparar ambas varianzas obtenemos la aceptación o rechazo de la hipótesis nula (que consiste en afirmar que no existe diferencia entre las medias de los distintos grupos)*
Lógica del método*: Los sujetos se distribuyen aleatoriamente en los mencionados grupos (para minimizar la influencia de las variables extrañas); por tanto, son semejantes en cuanto a la variable estudiada dentro de cada grupo y entre los distintos grupos. Si después de aplicar el tratamiento experimental existen diferencias, se puede pensar que son debidas a los procedimientos aplicados.*

<u>TERMINOLOGÍA:</u>

Factores = *Var. Independientes que se estudian.* ***Niveles =*** *categorías en que dividimos los factores.*
Efectos Fijos = *sólo nos interesan unos niveles concretos, los establecidos. Los resultados sólo afectan a estos niveles.* ***Efectos Aleatorios =*** *los niveles actúan como una muestra y las conclusiones se pueden generalizar en el sentido de los datos de la muestra.*
Modelo Equilibrado = *igual número de sujetos en los grupos.* ***Modelo no Equilibrado =*** *distinto número de sujetos en los grupos.*

PASOS PARA REALIZAR EL ANOVA →

1.- Probar los supuestos *(independencia de las observaciones, normalidad de las distribuciones y homogeneidad de las varianzas)para asegurarnos que se puede aplicar el ANOVA*
2.- *Enunciar las* ***hipótesis estadísticas***
3.- *Decidir el* ***estadístico de contraste*** *que vamos a utilizar para probar la H_0*
4.- *Con qué* ***nivel de confianza*** *vamos a trabajar (establecer la región crítica de rechazo de la H_0*
5.- *Calcular el* ***estadístico de contraste*** *(Tabla del ANOVA)*
6.- *Tomar la* ***decisión sobre la H_0*** *(comparar el valor F obtenido con el valor crítico)*
7.- Interpretación *en el contexto de la investigación*

SUPUESTOS DEL ANOVA

1.- Escala de medida de la VD, *al menos,* ***de intervalo.***
2.- Normalidad de las distribuciones: *Las muestras o grupos a comparar proceden de poblaciones que se distribuyen normalmente →* ***Pruebas de Bondad de Ajuste*** *(Lilliefors, Kolmogorov-Smirnov, X^2 de Pearson) // No es necesario desarrollarlas.*
3.- Independencia de las observaciones: *Las muestras o grupos han sido obtenidos de forma aleatoria (las muestras y las observaciones deben ser independientes) →* ***Test de rachas.***
4.- Homogeneidad de las varianzas (homocedasticidad): *Los grupos a comparar deben proceder de poblaciones cuyas varianzas no difieran de forma significativa →* ***Test de Cochran*** *(modelos equilibrados y* ***Test de Bartlett*** *(modelos no equilibrados)*

INDEPENDENCIA DE LAS OBSERVACIONES (TEST DE RACHAS) →

Hipótesis estadísticas:
H_0: Las observaciones y las muestras son independientes
H_1: Las observaciones y las muestras no son independientes

***Estadístico de Contraste**: (r = nº de rachas // n_1 = nº de signos + // n_2 = nº de signos –)*
*Si n_1 y $n_2 \leq 20$, entonces **Estadístico r →** (nº de rachas = nº de grupos de signos iguales seguidos)*
*Si n_1 y/o $n_2 > 20$, entonces **Estadístico T →** Distribución → Curva Normal N (0, 1)*

$$T = \frac{r - [(2n_1n_2 / n_1 + n_2) + 1]}{\sqrt{2n_1n_2 (2n_1n_2 - n_1 n_2) / (n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}$$

***Distribución Muestral**: Estadístico r → Tabla (Test de Rachas) // Estadístico T → Tabla N (0,1)*

***Cálculo del Estadístico de Contraste:** Para poder aplicar el Test hemos de dicotomizar la variable observada. Para ello: A partir de la Mediana (Md) de todas las puntuaciones tomadas conjuntamente (si una puntuación es mayor que la Md se sustituye por un signo + y si es menor por un signo –)*

***Valores Críticos:** Si el estadístico es r → $U_{\alpha/2}$ y $U_{1-\alpha/2}$ (en la tabla de valores críticos del Test de Rachas, buscamos los valores de n_1 y n_2) // Si el estadístico es T → $Z_{\alpha/2}$ y $Z_{1-\alpha/2}$*

Zona de Aceptación: ***Estadístico r → $U_{\alpha/2} < r < U_{1-\alpha/2}$*** ***Estadístico T → $Z_{\alpha/2} < T < Z_{1-\alpha/2}$***	***Zona de Rechazo:*** ***Estadístico r → $r \leq U_{\alpha/2}$ y $r \geq U_{1-\alpha/2}$*** ***Estadístico T → $T \leq Z_{\alpha/2}$ y $T \geq Z_{1-\alpha/2}$***
Decisión:* Estadístico r →** ***Si $U_{\alpha/2} < r < U_{1-\alpha/2}$ → Aceptamos Ho ***Si $r \leq U_{\alpha/2}$ ó $r \geq U_{1-\alpha/2}$ → Rechazamos Ho***	***Decisión:* Estadístico T →** ***Si $Z_{\alpha/2} < T < Z_{1-\alpha/2}$ → Aceptamos Ho*** ***Si $T \leq Z_{\alpha/2}$ o $T \geq Z_{1-\alpha/2}$ → Rechazamos Ho.***

PROBLEMA EJEMPLO

Un seleccionador de baloncesto desea averiguar como incide la hora del día a la que se entrena en el rendimiento de los jugadores durante los partidos. Para ello selecciona 18 sujetos y los distribuye aleatoriamente en turnos de mañana (M), tarde (T) y noche (N); seis en cada turno. Al final de la temporada el seleccionador los convoca a un torneo y hace el recuento de canastas conseguidas por los jugadores, obteniendo los siguientes resultados:

TURNOS	***NÚMERO DE CANASTAS ENCESTADAS POR LOS 18 SUJETOS***					
MAÑANA	*15*	*12*	*14*	*10*	*11*	*16*
TARDE	*7*	*9*	*12*	*17*	*10*	*12*
NOCHE	*13*	*15*	*20*	*17*	*16*	*18*

*Comprobar si las **observaciones son independientes** (sabemos que la Mediana = 13´5)**:***
***Hipótesis** → H: Las muestras son aleatorias y H_1: Las muestras no son aleatorias*

*Para contrastar la independencia **(Test Rachas) →** las observaciones pueden dicotomizarse, utilizando la mediana (asignando un + cuando la puntuación sea mayor y un - cuando la puntuación sea menor)*

Canastas	*15*	*12*	*14*	*10*	*11*	*16*	*7*	*9*	*12*	*17*	*10*	*12*	*13*	*15*	*20*	*17*	*16*	*18*
Signo	*+*	*-*	*+*	*-*	*-*	*+*	*-*	*-*	*-*	*+*	*-*	*-*	*-*	*+*	*+*	*+*	*+*	*+*
Rachas	*1*	*2*	*3*	*4*		*5*	*6*			*7*	*8*			*9*				

r → (nº de rachas) = 9 // n + = 9 (signos positivos) // n - = 9 (signos negativos)

Con un nivel de significación α = 0,05, buscamos los valores críticos en la tabla del test de Rachas
n - = 9; n + = 9; α / 2 = 0,025 y 1 - α / 2 = 0´975 (bilateral)
***$T_{(0,025)}$ = 5 y $T_{(0,975)}$ = 14 →** Como (rachas = 9) está dentro del intervalo (entre 5 y 14), se acepta H_0. Las observaciones son independientes.*

HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS (TEST DE COCHRAN) →

*Este supuesto es el que **más va a distorsionar** los resultados, en caso de no cumplirse, porque si al final hay diferencias entre los grupos, no podremos saber si se deben a la variable independiente o a que ya existían con anterioridad. Supuestos (**Modelo equilibrado**)*

<u>Hipótesis estadísticas:</u>

H_0: $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \sigma^2_3 = \ldots\ldots$ (Las varianzas poblacionales son iguales)

H_1: $\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2 \neq \sigma^2_3 \neq \ldots\ldots$ (Para alguna σ^2_i)

<u>Estadístico de Contraste</u> → R = (Varianza Muestral Mayor / ∑ Varianzas Muestrales)

El estadístico de contraste (distribución de valores críticos según la tabla de Cochran)

<u>Valor Crítico:</u> $R_{r,n,\alpha}$ ***(r = nº de grupos y n = nº de sujetos por grupo)***	***<u>Zona de Aceptación:</u>*** $R < R_{r,n,\alpha}$
<u>Zona de Rechazo:</u> $R \geq R_{r,n,\alpha}$	***<u>Decisión:</u>*** **Si** $R < R_{r,n,\alpha}$ **→ Aceptamos Ho** **Si** $R \geq R_{r,n,\alpha}$ **→ Rechazamos Ho**

PROBLEMA EJEMPLO

*Con el enunciado del problema utilizado para el test de rachas (Modelo equilibrado)**:***

TURNOS	NÚMERO DE CANASTAS ENCESTADAS POR LOS 18 SUJETOS					
MAÑANA	15	12	14	10	11	16
TARDE	7	9	12	17	10	12
NOCHE	13	5	20	17	16	18

*Sabiendo que se cumple el supuesto de normalidad de las distribuciones, comprobar si las **varianzas son homogéneas → H_0:** Las varianzas son iguales // **H_1:** No todas las varianzas son iguales*

*Para contrastar la homocedasticidad **(Test de Cochran) →*** $R = \text{máx}\ \hat{S}^2_I \ / \ \Sigma\ \hat{S}^2_I$

$\hat{S}^2_{MAÑANA} = (1042 / 6) - 13^2 = 4{,}67$

$\hat{S}^2_{TARDE} = (807 / 6) - 11{,}17^2 = 9{,}73$

$\hat{S}^2_{NOCHE} = (1663 / 6) - 16{,}5^2 = 4{,}92$

$\mathbf{R} = 9{,}73 / (4{,}67 + 9{,}73 + 4{,}92) = \mathbf{0{,}504}$

*Con un nivel de significación α = 0,05, buscamos los valores críticos de las tablas de Cochran → n = 6 // r (grupos) = 3 // **R = 0,7071***

***<u>Decisión</u>** → Como **0,504 < 0,7071**, se acepta H_0 (Las varianzas no difieren significativamente)*

HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS (TEST DE BARTLETT) →

***<u>Hipótesis estadísticas</u>** → Similares a las enunciadas en el test de Cochran.*

***<u>Supuestos</u>** → El test de Bartlett se usa para modelos **no equilibrados**.*

***<u>Estadístico de Contraste</u>** → Sigue la distribución Chi-Cuadrado con (r-1) gl (r = nº de grupos)*

<u>Valor Crítico:</u> $X^2_{(r-1)(1-\alpha)}$	***<u>Zona de Aceptación:</u>*** $X^2 < X^2_{(r-1)(1-\alpha)}$
<u>Zona de Rechazo:</u> $X^2 \geq X^2_{(r-1)(1-\alpha)}$	***<u>Decisión:</u>*** **Si** $X^2 < X^2_{(r-1)(1-\alpha)}$ **→ Aceptamos Ho** **Si** $X^2 \geq X^2_{(r-1)(1-\alpha)}$ **→ Rechazamos Ho**

PROBLEMA EJEMPLO

Sean *tres muestras para probar la homogeneidad de varianzas:*

Niños	Niñas	Adultos
6	9	8
5	8	10
6	8	8
4	5	3
3	10	7
5	7	6
4	6	7
4	8	9
5		8
$\Sigma = 42$	**$\Sigma = 61$**	**$\Sigma = 66$**
$\Sigma^2 = 204$	**$\Sigma^2 = 483$**	**$\Sigma^2 = 516$**
$n_1 = 9$	$n_2 = 8$	$n_3 = 9$

Medias → *4,67 (Niños) // 7,625 Niñas // 7,33 Adultos*

Varianzas Insesgadas →

$\hat{S}^2_{NIÑOS} = 1$ $\hat{S}^2_{NIÑAS} = 2{,}55$ $\hat{S}^2_{ADULTOS} = 4$

Varianza insesgada ponderada → $\Sigma_{gi}\ \hat{S}^2_i\ / g$

$$\hat{S}^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot \hat{S}^2_N + (n_2 - 1) \cdot \hat{S}^2_N + (n_3 - 1) \cdot \hat{S}^2_A}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1)}$$

ESTADÍSTICO DE CONTRASTE →

Con logaritmos decimales (r = grupos)→ $\chi^2_{R-1} = 2{,}3026 / C\ \{g \log \hat{S}^2 - \Sigma_{gi} \log \hat{S}^2_i\}$

Siendo $C = 1 + \{1/3\,(r-1)\} \cdot \{(\Sigma\ 1/g_i) - 1/g\}$
g_i = denominador de cada varianza insesgada i **$(n - 1)$**
g = suma de todas las g_i **(Σ_{gi})**

Averiguamos la Varianza Ponderada → $\hat{S}^2 = \Sigma_{gi}\ \hat{S}^2_i / g$ **= 2,515**

$\hat{S}^2 = \{(9-1) \cdot 1 + (8-1) \cdot 2{,}55 + (9-1) \cdot 4\} / (9-1) + (8-1) + (9-1)$ **= 2,515**

Averiguamos C → $1 + \{1/3\,(3-1)\} \cdot \{(1/8 + 1/7 + 1/8) - 1/23\}$ **= 1,0291**

Aplicamos el estadístico de Contraste →

$\chi^2_{r-1} = 2{,}3026 / \{1{,}0291 \cdot [23 \log 2{,}515 - (8 \log 1 + 7 \log 2{,}55 + 8 \log 4)]\}$ **= 3,45**

CONCLUSIÓN → *Distribución χ^2 con (r –1= 2) gl y α = 0,05* → ***5,99***

DECISIÓN → *Como* ***5,99 > 3,45*** *Aceptamos hipótesis nula de homocedasticidad.*

ANOVA (UN FACTOR) →

*__ANOVA UNIFACTORIAL__ → Influencia de **un único factor** (variable) **en distintos niveles** (categorías). Se utiliza el mismo esquema operativo para el efecto fijo y aleatorio, para el modelo equilibrado y el no equilibrado.*

***MODELO** → $Y_{ij} = \mu + \alpha_{ij} + \varepsilon_{ij}$ // Cualquier puntuación (Y) tiene tres componentes: (μ) que es la media de la población. (α) el nivel en que se encuentra, común a todos los componentes adscritos a ese nivel. (ε) el error experimental o factores no controlados en el experimento (se asume que es una variable aleatoria distribuida según N (0, σ). Ejemplo → Y_{17} = puntuación del sujeto 7º del grupo 1º.*

***HIPÓTESIS** → **Efectos fijos** (sobre las medias poblacionales) // **Efectos aleatorios** (sobre las varianzas → cuando son = 0, las medias son iguales).*

EFECTOS FIJOS →	EFECTOS ALEATORIOS →
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_i$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \ldots \neq \mu_i$ al menos para una μ_i	$H_0: \sigma^2_B = 0$ $H_1: \sigma^2_B \neq 0$ Cálculo similar

TABLA ANOVA UNIFACTORIAL

FUENTE DE VARIACIÓN	S MAS CUADRÁTICAS	GRADOS DE LIB RTAD	MEDIAS CUA RÁTICAS	ESTADÍSTICO DE CONTRASTE
ENTRE NIVELES	SC_{INTER}	I – 1 Nº de grupos o niveles menos 1	MC_{INTER} $(SC_{INTER}) / (I – 1)$	$F = \dfrac{MC_{INTER}}{MC_{INTRA}}$
DENTRO DE LOS NIVELES	SC_{INTRA}	N – I Nº de sujetos menos Nº de grupos	MC_{INTRA} $(SC_{INTRA}) / (N – I)$	
TOTAL	SC_{TOTAL}	N – 1 Nº de sujetos menos 1	F se distribuye → F con (I –1) y (N – I) grados de libertad.	

***CÁLCULOS** → Se cumple **$[SC_{TOTAL} = SC_{INTER} + SC_{INTRA}]$ y G. Libertad:** [N – 1 = (I – 1) + (N – I)]*

$$SC_{TOTAL} = \Sigma\, \Sigma\, Y^2 - \{(\Sigma\, \Sigma\, Y)^2 / N\}$$

$$SC_{INTRA} = SC_{TOTAL} - SC_{INTER}$$

$$SC_{INTER} = \Sigma\, (\Sigma\, Y)^2 / n - \{(\Sigma\, \Sigma\, Y)^2 / N\}$$

***DECISIÓN** → Rechazamos H_0 (igualdad de medias en los distintos niveles) si el valor de la F experimental (estadístico de contraste) es mayor que el valor F obtenido en las tablas, para un nivel de significación (**α**) predeterminado.*

El Numerador del estadístico de contraste contiene la Varianza de error + Efecto real de la VI. El Denominador contiene la Varianza de error. Por tanto, cuanto menor es el efecto real de la VI más se acerca el cociente a uno.

Valor Crítico: $F_{(I-1)\,(N-I)\,(1-\alpha)}$	**Zona de Aceptación:** $F < F_{((I-1)\,(N-I)\,(1-\alpha)}$
Zona de Rechazo: $F \geq F_{(I-1)\,(N-I)\,(1-\alpha)}$	**Decisión:** Si $F < F_{crítico}$ → Aceptamos H_0 Si $F \geq F_{crítico}$ → Rechazamos H_0

Cálculos abreviados *(Utilizamos el sistema de notación propuesto por* ***Keppel):*** *El cálculo de las Sumas de cuadrados se realiza sumando y restando las* ***razones básicas: [Y]*** *(relacionada con las puntuaciones individuales);* ***[A]*** *con los totales de los niveles y* ***[T]*** *con la suma total.*

Estructura de cálculo del numerador *→ Se elevan al cuadrado las cantidades implicadas y posteriormente se suman.*
Estructura de cálculo del denominador *→ Cualquiera que sea el término se divide por el número de puntuaciones que contribuyen a su cálculo.*

Fórmulas para las razones básicas	*Sumas Cuadrados a partir de razones básicas*
[T] = $T^2 / (a)(n)$ → *Diseño equilibrado* **[T] =** T^2 / N → *Diseño no equilibrado* **[A] =** $\sum A^2 / n$ → *Diseño equilibrado* **[A] =** $(\sum A^2_1 / n_1) + (\sum A^2_2 / n_2) + \ldots$ *(Diseño no equilibrado)* **[Y] =** $\sum Y^2$	SC_{TOTAL} **=** $[Y] - [T]$ → SC_{TOTAL} $SC_T = \sum\sum (Y - \bar{Y}_{TOTAL})^2$ SC_A **=** $[A] - [T]$ → $SC_{INTERGRUPO}$ $SC_A = \sum n\,(\bar{Y}_A - \bar{Y}_{TOTAL})^2$ $SC_{S/A} = [Y] - [A]$ → $SC_{INTRAGRUPO}$ $SC_{S/A} = \sum\sum (Y - Y_A)^2$
N = *Número total de observaciones //* **n =** *Observaciones por nivel*	

PROBLEMA EJEMPLO

Un seleccionador de baloncesto desea averiguar cómo incide la hora del día a la que se entrena en el rendimiento de los jugadores durante los partidos. Para ello selecciona 18 sujetos y los distribuye aleatoriamente en turnos de mañana (M), tarde (T) y noche (N); seis en cada turno. Al final de la temporada el seleccionador los convoca a un torneo y hace el recuento de canastas conseguidas por los jugadores, obteniendo los siguientes resultados:

TURNOS	NÚMERO DE CANASTAS ENCESTADAS POR LOS 18 SUJETOS					
MAÑANA	15	12	14	10	11	16
TARDE	7	9	12	17	10	12
NOCHE	13	15	20	17	16	18

SUMATORIOS (Σ)		Σ^2	Nº DE CASOS	MEDIAS
MAÑANA	78	1042	6	13
TARDE	67	807	6	11,17
NOCHE	99	1663	6	16,5
TOTAL	244	3512	18	13,55

Cálculo de las Sumas Cuadráticas:

$SC_{TOTAL} = \Sigma\,\Sigma\, Y^2 - \{(\Sigma\,\Sigma\, Y)^2 / N\}$ → $3512 - (244)^2 / 18$ **= 204,45** → *Abreviado: [Y] – [T]*

$\Sigma\,\Sigma\, Y^2$ = *según tabla 3512*
$(\Sigma\,\Sigma\, Y)^2 / N$ = *según tabla* $244^2 / 18 = 3307{,}55$

$SC_{INTER} = \Sigma\,(\Sigma\, Y)^2 / n - \{(\Sigma\,\Sigma\, Y)^2 / N\}$ → $3395{,}67 - (244)^2 / 18$ **= 88,11** → *Abreviado: [A] – [T]*

$\Sigma\,(\Sigma\, Y)^2 / n = (78^2/6) + (67^2/6) + (99^2/6) = 3395{,}67$
$(\Sigma\,\Sigma\, Y)^2 / N$ = *según tabla* $244^2 / 18 = 3307{,}55$

$SC_{INTRA} = SC_{TOTAL} - SC_{INTER}$ → $204{,}45 - 88{,}11$ **= 116,3**

TABLA ANOVA UNIFACTORIAL

FUENTE DE VARIACIÓN	SUMAS CUADRÁTICAS	GRADOS DE LIBERTAD	MEDIAS CUADRÁTICAS	ESTADÍSTICO DE CONTRASTE
ENTRE NIVELES	SC_{INTER} 88,11	I – 1 3 – 1 = 2	MC_{INTER} 88,11 / 2 = 44,05	F = 44,05 / 7,75 = 5,68
DENTRO DE LOS NIVELES	SC_{INTRA} 116,3	N – I 18 – 3 = 15	MC_{INTRA} 116,3 / 15 = 7,75	
TOTAL	SC_{TOTAL} 204,45	N – 1 18 – 1 =17	F de Snedecor con (2 y 15) g l. y $\alpha = 0{,}05$ F (Tablas) = 3,68	

Decisión → *Comparando los resultados* ***F (tablas) = 3,68 < F (experimental) = 5,68,*** *por tanto rechazamos la hipótesis nula. Existen diferencias significativas entre el rendimiento de los jugadores dependiendo de la hora del día a la que entrenan a un nivel de confianza del 95%.*

COMPARACIONES MÚLTIPLES (previo rechazo de la H_0) →

Permiten obtener información sobre las diferencias entre los distintos tratamientos considerados uno a uno. El ***objetivo*** *de las comparaciones múltiples es* ***reducir la cantidad de Error Tipo I (α)*** *que cometeríamos si se compararan sin más, dos a dos, todas las muestras posibles. Dos tipos:*
→ *Comparaciones planificadas o* ***a priori*** *(no interesan todas las comparaciones, sólo algunas)*
→ *Comparaciones no planificadas,* ***a posteriori*** *o post hoc.*
Las que vamos a utilizar se denominan ***no planificadas, a posteriori o post hoc*** *(se llevan a cabo cuando se ha realizado el Análisis de Varianza y la F ha sido significativa / hemos rechazado la H_0). Las más importantes →* ***TUKEY // SECHEFFÉ.***

PRUEBA TUKEY (HSD) → $HDS_{TUKEY} = q_{\alpha, gl, K} \sqrt{MC_{error} / n}$

q → *valor crítico en la tabla de rango studentizado. Se averigua considerando el nivel de confianza fijado (**α**), los grados de libertad de la MC error y el número de grupos o tratamientos a comparar en el ANOVA.*
MC_{ERROR} → *media cuadrática error del Anova (MC_{INTRA} / $MC_{S\,I\,A}$)*
n → *tamaño de cada grupo (los modelos han de ser equilibrados). Cuando el modelo no es equilibrado, se sustituye* ***n por n´*** → $n' = k / (1 / n_1) + (1 / n_2)...$

Rechazamos H_0 cuando $(|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| \geq HDS_{TUKEY}$

PRUEBA SCHEFFÉ (CR) → *Permite, además, realizar comparaciones complejas (una media con otras dos consideradas en conjunto). Los coeficientes c (pesos) → (2), (- 1) y (-1). Cuando se utiliza en lugar de Tukey, para comparaciones dos a dos, es menos potente y más conservadora que Tukey, lo que significa que, en igualdad de condiciones, el valor crítico de Scheffé es ligeramente superior al de Tukey, por lo que resulta más difícil rechazar la hipótesis nula de la igualdad de medias.*

$$CR_{SCHEFFÉ} = \sqrt{(k - 1)\, F_{(k-1),\, gl\, ERROR}} \;\sqrt{MC_{ERROR} [\Sigma (c^2_j / n_j)]}$$

k → *Número de grupos*
n_i = *número de sujetos de cada grupo.*
$F_{(k-1),\, gl\, ERROR}$ → *F experimental del ANOVA.*
MC_{ERROR} → *Media cuadrática error.*
c^2_j → *Coeficiente de las combinaciones lineales (en cada combinación la suma de coeficientes = 0)*

$\varphi_1 = 2 \cdot \bar{Y}_1 - (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3)$ → *Entonces:* $c_1 = 2$, $c_2 = (-1)$, $c_3 = (-1)$ → *Dado que* $(\sum c_j = 0)$

Para hallar los c_j, se debe tener en cuenta que siempre deben sumar 0. Es más fácil calcular primero los c_j de los que se combinan conjuntamente, que siempre serán negativos, y luego el del que se compara frente a todos, que será la suma de los otros, pero con signo positivo.
<u>Decisión:</u>
Si $\varphi_1 \geq CR$ → *Existen diferencias significativas entre el nivel y los otros tomados conjuntamente.*
Si $\varphi_1 < CR$ → *No existen diferencias significativas entre el nivel y los otros tomados conjuntamente*

PROBLEMAS EJEMPLO →

Siguiendo con nuestro planteamiento anterior:

Prueba Tukey (HSD) → $HDS_{TUKEY} = q_{\alpha, gl, K} \sqrt{MC_{error} / n}$

$n = 6$ // $k = 3$ // $\bar{X}_{MAÑANA} = 13$ // $\bar{X}_{TARDE} = 11{,}17$ // $\bar{X}_{NOCHE} = 16{,}5$

Valor q *para* $\alpha = 0{,}05$; *15 grados de libertad y tres grupos →* ***3,67*** MC_{INTRA} *→* ***7,75***

$\mathbf{HDS_{TUKEY}} = 3{,}67 \sqrt{7{,}75 / 6} = \mathbf{4{,}17}$ *(modelo equilibrado)*

l 13 - 11,17 l = 1,83 < 4,17 Diferencia no significativa.
l 13 - 16,5 l = 3,5 < 4,17 Diferencia no significativa.
l 11,17 - 16,5 l = 5,33 > 4,17 Diferencia significativa.

Decisión *→ Existen diferencias significativas entre entrenar por la tarde y por la noche, siendo el mejor rendimiento por la noche (media más alta)*

Prueba Scheffé (CR) → *Comparación entre la media del turno de noche con las de mañana y tarde consideradas conjuntamente.*

$CR_{SCHEFFÉ} = \sqrt{(k-1)\, F_{(k-1),\, gl\, ERROR}} \sqrt{MC_{ERRROR}[\Sigma (c^2_j / n_j)}$

Valor F *para* $\alpha = 0{,}05$ *// 2 y 15 grados de libertad* ***→ 3,68*** MC_{INTRA} *→* ***7,75***

$\mathbf{CR_{SCHEFFÉ}} = \sqrt{(3-1) \cdot 3{,}68} \sqrt{(7{,}75) \cdot (2^2 / 6 + 1^2 / 6 + 1^2 / 6)} = \mathbf{6{,}15}$

Coeficientes c (pesos) → (2), (- 1) y (-1) ψ *→ l (2 · 16,5) + (- 1 · 11,17) + (- 1 · 13) l* ***= 8,83***

Decisión *→ Como 8,83 > 6,15 →* ***Rechazamos*** $\mathbf{H_0}$ *(existen diferencias significativas entre el turno de noche y los de mañana y tarde considerados conjuntamente.*

MODELOS NO PARAMÉTRICOS PARA MUESTRAS INDEPENDIENTES:

Se utilizan como ***alternativa al ANOVA*** *cuando no se cumplen los supuestos ya indicados. Tienen menos restricciones y también una potencia menor.*

TEST DE KRUSKAL - WALLIS *→ Es una ampliación del test de Mann-Whitney.*
Supuestos: *VD es una variable continua que se transforma en una escala ordinal (que disminuye el impacto de los valores extremos); la distribución poblacional puede ser de cualquier tipo (las varianzas deben ser homogéneas); se trata de k muestras aleatorias e independientes que queremos comparar.*

HIPÓTESIS → $H_0: \eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_K$
$H_1: \eta_1 \neq \eta_2 \neq \ldots \neq \eta_K$ *Al menos para una* η

ESTADÍSTICO DE CONTRASTE → $\mathbf{H = \{12 / N (N + 1)\} \cdot \{\Sigma (R^2 / n\} - 3 (N + 1)}$

$\mathbf{N} =$ *número total de observaciones;* $\mathbf{n} =$ *número de observaciones de cada muestra*
$\mathbf{R^2} =$ *suma de rangos de cada muestra, previa ordenación única.*
El estadístico de contraste sigue la ***distribución*** $\mathbf{X^2}$ *con (k-1) gl*

Cálculo: Se ordenan todas las puntuaciones en una sola serie, (es decir, tomándolas todas en cuenta), asignamos rangos de 1 a n, dando a la puntuación menor el rango 1. En caso de empate → (rango medio); es decir, asignándoles la media aritmética de los rangos que les hubieran correspondido de ser distintas.

Decisión: *Cuando se rechaza la* H_0*, se procede a realizar comparaciones múltiples (tratamientos entre los que se producen las diferencias)*

Diferencia mínima crítica → $MV_{KV} = Z_{adj} \sqrt{N(N+1)/12 \cdot (\sum 1/a_i)}$

*Siendo **Z_{adj} el percentil 1 – (α / 2c)** de la distribución normal tipificada. (c) es el nº de comparaciones a realizar en un contraste bilateral [en uno unilateral → $Z_{adj} = 1 - (\alpha / c)$]*

Para comparar las diferencias de rangos → $\left| \bar{R}_i - \bar{R}_j \right| > MV_{KW}$

PROBLEMA EJEMPLO

En un estudio sobre antojo por el chocolate varios autores querían determinar si la distribución poblacional del consumo de chocolate en una semana era igual en una muestra de niños (N), que en una muestra de mujeres adultas (MA) y que en una de hombres adultos (HA). Para ello se seleccionaron aleatoriamente 5 sujetos de cada grupo y se midió su consumo de chocolate contabilizando (según se recoge en la tabla) el número de alimentos con chocolate consumidos en una semana (C):

NIÑOS		MUJERES ADULTAS		HOMBRES ADULTOS	
N	RANGO	N	RANGO	N	RANGO
6	**1**	31	**13,5**	13	**7**
11	**4,5**	7	**2**	32	**15**
12	**6**	9	**3**	31	**13,5**
20	**9**	11	**4,5**	30	**12**
24	**10**	16	**8**	28	**11**
Rango Medio = 30,5 / 5 = 6´1 **Σ^2 RANGOS = 930,25** **$\Sigma R^2 / 5 = 186,05$**		**Rango Medio = 31 / 5 = 6´2** **Σ^2 RANGOS = 961** **$\Sigma R^2 / 5 = 192,20$**		**Rango Medio = 58,5 / 5 = 11´7** **Σ^2 RANGOS = 3422,25** **$\Sigma R^2 / 5 = 684,45$**	

Asumiendo que la distribución de consumo es continua y α = 0,10. Se trata de tres muestras independientes y los datos están medidos en una escala de razón.

Hipótesis →
***H_0:** No existen diferencias poblacionales en el consumo semanal de chocolate entre N, MA y HA.*
***H_1:** Existen diferencias poblacionales en el consumo semanal de chocolate entre, al menos dos grupos.*

Estadístico de Contraste →** Kruskal – Wallis **$H = \{12 / N (N + 1)\} \cdot \{\Sigma (R^2 / n\} - 3 (N + 1)$

H =** {12 / 15 (15 + 1)} · {186,05 + 192,20 + 684,5} – 3 (15 + 1) = **5,135

*El estadístico de contraste sigue la **distribución X^2** con (3-1) gl y α = 0,10 → **$X^2_{2;\,090} = 4´61$***

***Decisión →** Como **5,135 > 4,61** Se Rechaza la Hipótesis Nula (**Comparaciones múltiples →** Las tres muestras son equilibradas)*

*$MV_{KV} = Z_{adj} \sqrt{N(N+1)/12 \cdot (\sum 1/n_i)}$ → $MV_{KV} = 2´13 \sqrt{15(16)/12 \cdot (1/5)}$ → **$MV_{KV} = 4´26$***

*Donde **Z_{adj} → [1 – (α / 2c)]** → [1 – (0´10/ 6)] = 0´9834 **(Z = 2´13)** (c = 3 comparaciones)*

*$\left| \bar{R}_{MA} - \bar{R}_N \right|$ = l 6´2 – 6´1 l = **0,1 < 4´26** Diferencia no significativa*

*$\left| \bar{R}_{MA} - \bar{R}_{HA} \right|$ = l 6´2 – 11´7 l = **5´5 > 4´26 Diferencia significativa***

*$\left| \bar{R}_N - \bar{R}_{HA} \right|$ = l 6´1 – 11´7 l = **5´6 > 4´26 Diferencia significativa***

***Interpretación del resultado en el contexto de la investigación →** Existen diferencias significativas en el consumo semanal de chocolate entre N, MA y HA a un nivel de confianza del 90 % considerado globalmente. Analizando los resultados, las diferencias se dan entre N y MA con HA.*