TEMA Nº 4 → ANÁLISIS DE DATOS PARAMÉTRICOS PARA DISEÑOS DE DOS GRUPOS (MUESTRAS RELACIONADAS)

CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA DOS MUESTRAS RELACIONADAS

Muestras independientes: *n_1 y n_2 muestras de sujetos diferentes, extraídos aleatoriamente de sus respectivas poblaciones.*
Muestras relacionadas: *se trata de los mismos n sujetos observados en condiciones experimentales diferentes, o n pares de sujetos semejantes entre sí (gemelos, hermanos,...)*

*Las muestras relacionadas nos ayudan a **reducir la varianza de error**. Así, cuanto mayor sea la relación entre ambas muestras, menor será la varianza de la distribución muestral de las diferencias y, por tanto, mayor el estadístico de contraste.*

CONTRASTES DE HIPÓTESIS:

PARA DOS MEDIAS (PARAMÉTRICOS)	**CONOCIDA LA VARIANZA POBLACIONAL DE LAS DIFERENCIAS**	
	DESCONOCIDA LA VARIANZA POBLACIONAL DE LAS DIFERENCIAS	
PARA DOS MEDIANAS (NO PARAMÉTRICOS) → TEST DE WILCOXON		
PARA DOS PROPORCIONES		

CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA DOS MEDIAS (MUESTRAS RELACIONADAS)

Supuestos	➢ **Observaciones independientes** ➢ **Nivel de medida de intervalo o razón** ➢ **Distribuciones normales en la población de diferencias ó bien ($n \geq 30$)**	
Hipótesis (similares)	**VARIANZA POBLACIONAL DE LAS DIFERENCIAS CONOCIDA**	**VARIANZA POBLACIONAL DE LAS DIFERENCIAS DESCONOCIDA**
	C. Bilateral $H_0: \mu_1-\mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$ **C. Unilateral Derecho** $H_0: \mu_1-\mu_2 \leq 0$ $H_1: \mu_1-\mu_2 > 0$	**C. Unilateral Izquierdo** $H_0: \mu_1-\mu_2 \geq 0$ $H_1: \mu_1-\mu_2 < 0$
Estadístico Contraste	$Z = (\bar{D} - \mu_d) / (\sigma_d / \sqrt{n})$	$T = (\bar{D} - \mu_d) / (\hat{S}^2_d / \sqrt{n})$
Distribución Muestral	**Normal Tipificada: (0, 1)**	**"t" de Student: gl = n-1**
Regla decisión	**Conocida (Z) o desconocida (t) la varianza de la población (valor o valores críticos)** **(C. Bilateral)** → $t \leq t_{\alpha/2;\, n-2}$ y $t \geq t_{1-\alpha/2;\, n-2}$ // $Z \leq Z_{\alpha/2}$ y $Z \geq Z_{1-\alpha/2}$ **(C. Unilateral Izquierdo)** $t \leq t_{\alpha;\, n-2}$ // $Z \leq Z_{\alpha}$ **(C. Unilateral Derecho)** $t \geq t_{1-\alpha;\, n-2}$ // $Z \geq Z_{1-\alpha}$ **Nivel crítico p → Se rechaza H_0 si $p < \alpha$ y se acepta si $p > \alpha$**	
Intervalo confianza	$\bar{D} \pm \mid Z_{\alpha/2} \mid \cdot\ \sigma_D / \sqrt{n}$ **= (Lím. infer y sup)** **Distribución Muestral Z con N (0,1)**	$\bar{D} \pm \mid t_{\alpha/2;\, n-1} \mid \cdot\ S_D / \sqrt{n}$ **= (Lím. infer y sup)** **Distribución Muestral T con (n – 1) gl**

PROBLEMAS EJEMPLO (CH diferencia de Medias Relacionadas)

Se desea estudiar si los alumnos de la ESO son más variables en cuanto a su nivel de concentración antes y después de haberles sometido a una terapia. Sobre una muestra aleatoria de 7 alumnos se toman medidas del nivel de concentración previo y posterior a la aplicación de la terapia, obteniéndose los siguientes resultados (a mayor puntuación, mayor concentración):

MEDIDA PREVIA	***12 9 11 10 9 6 7***
MEDIDA POSTERIOR	***7 5 6 6 5 6 7***

Sabiendo que para aplicar el estadístico de contraste se resta la medida posterior de la previa, que la concentración es una variable medida a nivel de intervalo y que se distribuye normalmente en ambas poblaciones, tómese un nivel de significación α = 0,05 y compruebe si los alumnos se concentran más al finalizar la terapia.

Supuestos: *Siete alumnos de la ESO (antes y después de la terapia) → Muestras relacionadas, (α = 0,05), variable medida a nivel de intervalo y se distribuye normalmente en ambas poblaciones. Varianza poblacional desconocida →* ***Diferencia de medias (muestras relacionadas)***

Hipótesis*: La hipótesis alternativa es la hipótesis del investigador. Del planteamiento del problema se deduce de que se trata de un contraste unilateral izquierdo donde:*

$$H_0: \mu_{después} \geq \mu_{antes} \rightarrow H_1: \mu_{después} < \mu_{antes}$$

Estadístico de contraste:

Medida Previa	Medida Posterior	Diferencia Posterior - Previa	$D - D_{Media}$	$(D - D_{Media})^2$
12	7	- 5	- 1,86	3,4596
9	5	- 4	- 0,86	0,7396
11	6	- 5	- 1,86	3,4596
10	6	- 4	- 0,86	0,7396
9	5	- 4	- 0,86	0,7396
6	6	0	3,14	9,86
7	7	0	3,14	9,86
Σ = 64	Σ = 42	Σ = (- 22)		Σ = 28,86

Averiguamos la media ($\bar{D}$) y la varianza insesgada ($\hat{S}^2_d$) de las puntuaciones diferencia:

Desconocida la varianza de la población: $\mathbf{T = (\bar{D} - 0) / (\hat{S}^2_d) / \sqrt{n}}$ → $T = (-3,14) / (4,81 / \sqrt{7}) = -$ **1,7**

Donde: $\hat{S}^2_d = \sqrt{\Sigma (D_i - D_{Media})^2 / (n-1)}$ y $\bar{D} = \bar{Y_1} - \bar{Y_2} = \Sigma D_i / n$

$\hat{S}^2_d = \sqrt{28,86 / 6} =$ **4,81** y $\bar{D} = (-22) / 7 =$ **(- 3,14)**

Regla de decisión:

Valor crítico *(contraste unilateral izquierdo) →* ***- 1,943*** *(valor crítico* $\mathbf{T_{0,05\ y\ 6\ gl}}$*)*
Nivel crítico p *sólo puede obtenerse el valor aproximado, porque 1,7 no figura en la tabla T de Student para n–1 = 6 gl.* ***El valor 1,7 está entre 0,10 (1,4) y 0,05 (1,9).***

Conclusión e interpretación: *Teniendo en cuenta que se trata de un contraste unilateral izquierdo se acepta H_0 → El estadístico de contraste (-1,7) < (-1,943) (valor crítico $T_{0,05\ y\ 6\ gl}$) // El nivel p crítico (0´05 < p < 0´10) > α = 0,05 por lo que se acepta H_0. No disponemos de evidencia suficiente para afirmar que los alumnos se concentran más al finalizar la terapia.*

Intervalo de confianza: *Suponemos un contraste bilateral para realizar el intervalo.*

$\bar{D} \pm | t_{\alpha/2;\, n-1} | \cdot \hat{S}^2_d / \sqrt{n}$ = (Límite inferior y superior) // Distribución Muestral T con (n – 1) gl

(-3´14) ± 1´943 · 4´81 / 2´64 → (- 3´14) ± 3´54 → (0´4 y 6´68) → No contiene el 0, Rechazamos H_0

Unos psicólogos hipotetizan que los hombres (H) con más de 20 años son más afectuosos hacia su pareja que las mujeres (M). Extrae una muestra aleatoria de 8 parejas casadas y les mide el grado de afectividad hacia la pareja, obteniendo los datos que aparecen a continuación (a mayor puntuación mayor afectividad hacia la pareja). Se sabe que la puntuación en afectividad es una variable medida a nivel de intervalo que se distribuye normalmente y que las observaciones entre las muestras no son independientes. Se fija alfa en 0´01. Suponemos conocida la varianza de las diferencias ($\sigma^2_d = 5$).

PAREJAS	1	2	3	4	5	6	7	8
HOMBRES	13	5	6	9	10	7	11	8
MUJERES	1	9	8	6	5	8	3	5

Supuestos: *Se sabe que la puntuación en afectividad es una variable medida a nivel de intervalo, que se distribuye normalmente en ambas poblaciones y que conocemos la varianza de las diferencias (σ^2_d = 25). Se fija α en 0,04. Según el enunciado →* ***Diferencia de medias (muestras relacionadas)***

Hipótesis: *Se plantea un contraste unilateral derecho →* $H_0: \mu_H \leq \mu_M$. y $H_1: \mu_H > \mu_M$

Estadístico de contraste:

H	M	D
13	1	12
5	9	- 4
6	8	- 2
9	6	3
10	5	5
7	8	- 1
11	3	8
8	5	3
Media = 8,7	Media = 5,7	Σ = 24

$\bar{D} = \bar{H} - \bar{M} = \Sigma D_i / n$ → $\bar{D} = 24 / 8 = \mathbf{3}$ // $\sigma^2_d = \mathbf{5}$

$Z = (\bar{D} - 0) / (\sigma^2_d / \sqrt{n})$ → T = 3 / (5 / √8) = 3 / 1´77 = 1,69

Regla de decisión:
El nivel crítico p (probabilidad de obtener un valor del estadístico, al menos, tan extremo como el hallado) se obtiene a partir del valor muestral del estadístico de contraste (1,69) que buscando en la tabla de la curva normal → p = 1 – P (T ≤ 1´69) → 1-0`9545 = 0´0455.
El valor crítico para un contraste unilateral derecho y un alfa = 0´01 es → 2´33

Conclusión e interpretación: *Al nivel de confianza del 99% no existen diferencias significativas. No aceptamos la hipótesis de psicólogo (H_1); por tanto, aceptamos H_0 (los hombres no son más afectuosos que las mujeres)*

Intervalo de confianza: *Suponemos un contraste bilateral para realizar el intervalo.*

$\bar{D} \pm |Z_{\alpha/2}| \cdot \sigma^2_d / \sqrt{n}$ = (Límite inferior y superior) // Distribución Muestral Z con N (0, 1)

3 ± 2´58 · 5 / 2´83 → 3 ± 4´57 → (- 1´57 y 7´57) → Como contiene 0 aceptamos H_0

CH DOS MEDIANAS (MUESTRAS RELACIONADAS) PRUEBA DE WILCOXON

Supuestos	➢ ***Variable dependiente con un nivel de medida al menos ordinal*** ➢ ***La distribución de la diferencia de los rangos es simétrica***
Hipótesis	***C. Bilateral*** $H_0 : M_1 = M_2$ $H_1 : M_1 \neq M_2$ ***C. Unilateral Derecho*** $H_0 : M_1 \leq M_2$ $H_1 : M_1 > M_2$ ***C. Unilateral Izquierdo*** $H_0 : M_1 \geq M_2$ $H_1 : M_1 < M_2$
Estadístico Contraste	***1.- Calculamos las diferencias entre las puntuaciones originales.*** ***2.- Asignamos rangos a los valores absolutos de las diferencias.*** ***3.- Sumamos los rangos que proceden de diferencias positivas y los rangos que proceden de diferencias negativas, obteniendo:*** $\sum R_-$ ***y*** $\sum R_+$ ***El estadístico de contraste "W" es el menor de*** $\sum R_-$ ***y*** $\sum R_+$
Distribución Muestral	***Utilizamos la tabla U de Mann-Whitney-Wilcoxon***
Regla decisión	***Conocida (Z) o desconocida (t) la varianza de la población (valor o valores críticos)*** ***(C. Bilateral)*** → $W > w_{n1,\ n2;\ \alpha/2}$ ***(C. Unilateral Izquierdo)*** → $W < w_{n1,\ n2;\ \alpha}$ ***(C. Unilateral Derecho)*** → $W > w_{n1,\ n2;\ \alpha}$
Aproximación A la Normal $n \geq 30$	$Z = \dfrac{(T) - [n\,(n+1)/4]}{\sqrt{n\,(n+1)(2n+1)/24}}$

PROBLEMA EJEMPLO

Un investigador desea comparar el grado de hiperactividad en obesos cuando están en un programa para bajar de peso (dieta) y sin programa para bajar de peso. Dispone de 10 sujetos a los que somete a las dos condiciones experimentales (con dieta y sin dieta). Las puntuaciones se reflejan en la tabla. Sabiendo que la distribución de las diferencias es simétrica, con un nivel de confianza del 95%, ¿se puede afirmar que hay diferencias en hiperactividad en obesos cuando están o no en un programa de dieta?

Supuestos: *Disponemos de dos muestras relacionadas (tamaño pequeño). Sabemos que la distribución de las diferencias en la población es simétrica. Datos medidos, al menos, a un nivel ordinal.*

Hipótesis: *Planteamos un contraste bilateral* → $H_0 : M_1 = M_2$ **y** $H_1 : M_1 \neq M_2$

Estadístico de contraste:

Sujetos	Con P. D.	Sin P. D.	Diferencias	Rango	Asignar Signo	Rango de (-) Frecuente
1	8	7	1	1 (1.5)	1.5	
2	7	4	3	7 (7.5)	7.5	
3	9	10	-1	2 (1.5)	-1.5	-1.5
4	5	9	-4	9 (9.5)	-9.5	-9.5
5	10	6	4	10 (9.5)	9.5	
6	6	4	2	3 (4.5)	4.5	
7	8	5	3	8 (7.5)	7.5	
8	10	8	2	4 (4.5)	4.5	
9	7	9	-2	5 (4.5)	-4.5	-4.5
10	9	7	2	6 (4.5)	4.5	

$\sum R_+ = (1´5 + 7´5 + 9´5 + 4´5 + 7´5 + 4´5 + 4´5) =$ **39´5 y** $\sum R_- = (1´5 + 9´5 + 4´5) =$ **15´5**
Se toma el valor del más pequeño de los sumatorios → **W = 15´5 (Estadístico de Contraste)**

Regla de decisión: Con α/2 = 0´05 (contraste bilateral) y n = 10, acudimos a la tabla de Wilcoxon y obtenemos un valor crítico = $W_{0´025;\,10} = 9$

Conclusión e interpretación: Dado que el estadístico de contraste (W = 15´5) > el valor crítico (W = 9) no podemos rechazar la H_0 con un nivel de confianza del 95%. Las diferencias en el incremento o disminución de la hiperactividad en personas obesas con dieta o sin dieta, no son significativas. Estadísticamente resultan iguales, en razón de que pueden ser diferencias dadas al azar.

CONTRASTES DE HIPÓTESIS DOS PROPORCIONES

Típico problema sobre cambios de opinión (pretest-postest), cuando la variable está dicotomizada.

Supuestos	➢ **Variable dependiente dicotómica o dicotomizada que medimos en la misma muestra en dos ocasiones.** ➢ **Muestra con [b + c] Observaciones independientes, donde [b + c] > 25** **(b+c) representan a los sujetos cuya puntuación es distinta en las dos ocasiones.**	
Hipótesis	**C. Bilateral** $H_0 : \pi_b = \pi_c$ $H_1 : \pi_b \neq \pi_c$ **C. Unilateral Derecho** $H_0 : \pi_b \leq \pi_c$ $H_1 : \pi_b > \pi_c$	**C. Unilateral Izquierdo** $H_0 : \pi_b \geq \pi_c$ $H_1 : \pi_b < \pi_c$
Estadístico Contraste	$Z = (b - c) / \sqrt{(b + c)}$	$\chi^2 = (b - c)^2 / (b + c)$
	b → (sujetos que puntúan 1 en la primera medida y 2 en la segunda). **c → (sujetos que puntúan 2 en la primera medida y 1 en la segunda)**	
Distribución Muestral	**Normal tipificada N (0, 1)**	**Chi Cuadrado con 1 grado de libertad**
Regla decisión	**(C. Bilateral)** → $Z \leq Z_{\alpha/2}$ y $Z \geq Z_{1-\alpha/2}$ **(C. Unilateral Izquierdo)** → $Z \leq Z_{\alpha}$ **(C. Unilateral Derecho)** → $Z \geq Z_{1-\alpha}$	$\chi^2 < \chi^2_{1;\,1-\alpha}$ → **Mantener H_0** $\chi^2 > \chi^2_{1;\,1-\alpha}$ → **Rechazar H_0**
Intervalo confianza	$(P_1 - P_2) \pm \lvert Z_{\alpha/2} \rvert \cdot \sqrt{(b + c)}$ = **(Límites inferior y superior)**	

PROBLEMA EJEMPLO

Una psicóloga desea estudiar si la proyección de imágenes de accidentes de tráfico influye en la forma de conducir. Extrae una muestra aleatoria de 102 sujetos con elevado historial de infracciones de tráfico y observa si cometen o no infracción en una determinada situación que propicia el hacerlo (saltarse un semáforo que acaba de cambiar a rojo). Encuentra que 54 no se lo saltan. Tras proyectarles imágenes de accidentes de tráfico, vuelve a observar si los sujetos se saltan o no se saltan el semáforo en las mismas condiciones. Encuentra que 34 de los que no se lo saltaban antes de proyectarles las imágenes se lo saltan después y 5 que se lo saltaban antes, también se lo saltan después. Se desea saber si ha habido un cambio significativo en cuanto a infracciones tras la proyección de imágenes. Utilice alfa = 0,01

Supuestos: Muestra grande de 102 sujetos sometidos a dos medidas de la misma variable (cometer o no cometer infracción)→ Variable dependiente dicotómica. **[b + c] > 25** Se trata de **contrastar las proporciones en dos muestras de observaciones relacionadas**.

Hipótesis: Planteamos un contraste bilateral → $H_0 : \pi_b = \pi_c$ y $H_1 : \pi_b \neq \pi_c$

Estadístico de contraste:

		Primera medida (Antes)		
		Si saltan (SI = 1)	**No saltan (NO = 2)**	**TOTALES**
Segunda Medida (Después)	**Si saltan (SI = 1)**	*a = 5*	***b = 34***	*39*
	No saltan (NO = 2)	***c = 63-20 = 43***	*d = 54-34 = 20*	*102 – 39 = 63*
TOTALES		*48*	*54*	*102*

Z = (b - c) / $\sqrt{(b+c)}$ → (34 – 43) / $\sqrt{(34 + 43)}$ = ***± 1\`02*** ***//*** *Distribución normal N (0,1)*

Regla de decisión:

Los valores críticos, contraste bilateral, con α/2 = 0,005 y 1- α/2 = 0,995 → ***± 2´58.***
El nivel crítico p (probabilidad de obtener un valor del estadístico, al menos, tan extremo como el hallado) se obtiene a partir del valor muestral del estadístico de contraste (± 1´02) que buscando en la tabla de la curva normal → 2 [P (Z ≥ 1´02) = 2 · (1 – 0,8461) = 2 · 0,1539 → ***0,3078.***

Conclusión e interpretación:

Como p (0,3078) > α (0,01) → Aceptamos H_0. También como 1´02 (valor muestral del estadístico de contraste) < 2´58 (el mayor de los valores críticos). También 1´02 está entre los valores críticos (-2´58 y 2´58).
Para α = 0´01, podemos afirmar que la proporción poblacional de los sujetos que se saltan el semáforo es la misma antes de la proyección de imágenes que después.

También con el test de McNemar: $\boldsymbol{\chi^2 = (b - c)^2 / (b + c)} \rightarrow \boldsymbol{\chi^2 =} (34 - 43)^2 / (34 + 43) = 1´05$

Para χ^2 con un grado de libertad, el valor 1´05 se encuentra entre (0´10 < p < 0´90) por lo que el nivel p crítico > que α (0,01) → Aceptamos H_0